

SOBRE EL ÁLGEBRA (máx,+) Y HORARIOS REGULARES

GIOVAGNOLI, Azul¹; MANCINELLI, Elina M.¹; WALPEN, Jorgelina ¹.

¹ Depto de Matemática - Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura / {azul,elina,walpen}@fceia.unr.edu.ar

Palabras claves: álgebra max-plus, sincronización, horario regular.

INTRODUCCIÓN

En la vida moderna el tiempo es un bien escaso y preciado. Por lo tanto, conocer la frecuencia o regularidad con la que algunos eventos ocurren contribuye tanto a la planificación de la vida cotidiana como a la eficiencia de distintos procesos. Por ejemplo cada cuanto tiempo una máquina ejecuta la misma tarea o con qué frecuencia se encuentra disponible el servicio de determinado transporte público.

Si la planificación de tareas requiere sincronización, es decir, una tarea no puede comenzar hasta que otras hayan finalizado, el marco natural para modelar estos problemas son las álgebras max-plus.

Específicamente se aborda el problema de horarios regulares para trenes que vinculan tres estaciones y se propone una frecuencia de salidas con la información que aporta la teoría espectral de matrices max-plus.

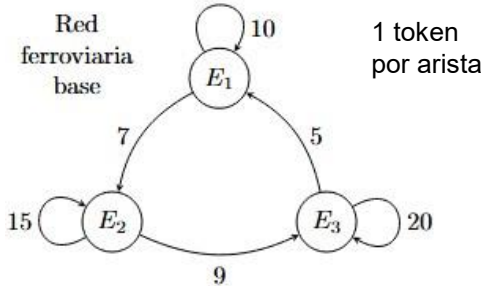
Álgebra max-plus

$(\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$

$a \oplus b = \text{máx}\{a, b\}$

$a \otimes b = a + b$

Red ferroviaria base



1 token por arista

Red ferroviaria

Grafo dirigido.

Arcos: rutas disponibles.

Tokens: trenes disponibles en cada ruta.

Nodos: estaciones.

Regla de sincronización: establece que todos los vehículos que llegan a cualquier estación tienen que esperarse entre sí para permitirle a los pasajeros cambiar (si así lo desean).

Se realiza un estudio de sensibilidad del autovalor max-plus respecto a los pesos de las aristas.

MODELO

Se construyeron 3 grafos fuertemente conexos de 3 nodos cada uno a partir de la red ferroviaria base, con variaciones en la cantidad de aristas. Para cada uno de ellos, planteamos los sistemas de ecuaciones max-plus asociados al escenario correspondiente.

El autovalor max-plus asociado al sistema de ecuaciones representa la regularidad del sistema, y puede verse como el máximo ciclo medio del grafo. Todos los eventos se disparan con el mismo período λ y los desfases relativos entre ellos permanecen fijos. Se utilizó la toolbox de Scilab [2] para encontrar el período λ y el horario de inicio.

$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k)$ con $A \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}$, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}_\varepsilon^n$

$\mathbf{x}(k)$: vector que contiene los horarios de la k-ésima salida

$A = (a_{ij})$ con a_{ij} : tiempo de la arista $E_j E_i$.

Autovalor max-plus

$w(c)$: peso del circuito c

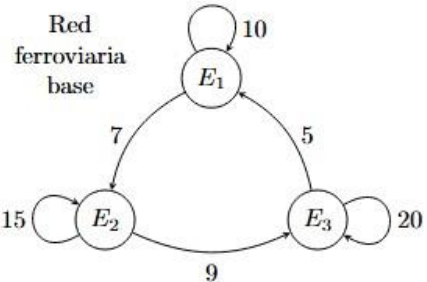
$\ell(c)$: cantidad de aristas en c

$\lambda = \max_{c \in \text{circuitos}} \frac{w(c)}{\ell(c)}$.

RESULTADOS

En cada uno de los siguientes cuatro grafos obtenidos (red ferroviaria base y variantes), analizamos intervalos de invariancia de cada una de las aristas para los cuales el autovalor $\lambda = 20$ se mantiene constante:

Red ferroviaria base



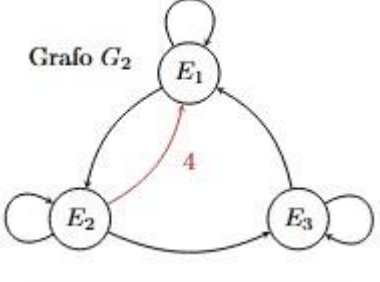
Intervalos de invariancia G_1

E_1 a E_2 : [7; 46]

E_2 a E_3 : [9; 48]

E_3 a E_1 : [5; 44]

Grafo G_2



Intervalos de invariancia G_2

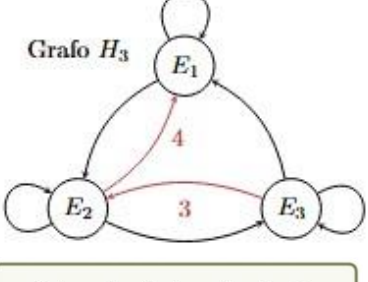
E_1 a E_2 : [7; 36]

E_2 a E_1 : [4; 33]

E_2 a E_3 : [9; 48]

E_3 a E_1 : [5; 44]

Grafo H_3



Intervalos de invariancia H_3

E_1 a E_2 : [7; 36]

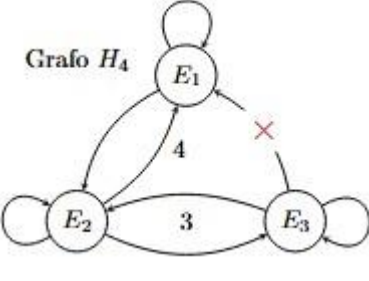
E_2 a E_1 : [4; 33]

E_2 a E_3 : [9; 37]

E_3 a E_2 : [3; 31]

E_3 a E_1 : [5; 44]

Grafo H_4



Intervalos de invariancia H_4

E_1 a E_2 : [7; 36]

E_2 a E_1 : [4; 33]

E_2 a E_3 : [9; 37]

E_3 a E_2 : [3; 31]

Para los primeros dos grafos, implementamos el algoritmo y analizamos los horarios de inicio proporcionados por el. Tenemos que $n \in \mathbb{N}$ para $n \leq 15$.

Caso	Autovalor	Horario de inicio						$E_1 E_2$	$E_2 E_3$
		$E_1 E_1$	$E_1 E_2$	$E_2 E_2$	$E_2 E_3$	$E_3 E_1$	$E_3 E_3$		
1	20	13	13	0	0	28	28	7	9
2	20	varía						7-46	9
3	20	13	13	0	0	28	28	7	9-48
4	20	varía						7-26 (*)	9-29 (*)
5 (*)	$20 + n$	0	0	$26 + 2n$	$26 + 2n$	$15 + n$	$15 + n$	$46 + 3n$	9
6 (*)	$20 + n$	$13 + n$	$13 + n$	0	0	$28 + 2n$	$28 + 2n$	7	$48 + 3n$
7 (*)	$20 + n$	0	0	$6 + \frac{n}{2}$	$6 + \frac{n}{2}$	$15 + n$	$15 + n$	$26 + 1,5n$	$29 + 1,5n$

Caso	Autovalor	Horario de inicio							$E_1 E_2$	$E_2 E_3$
		$E_1 E_1$	$E_1 E_2$	$E_2 E_1$	$E_2 E_2$	$E_2 E_3$	$E_3 E_1$	$E_3 E_3$		
1	20	13	13	0	0	0	28	28	7	9
2	20	varía							7-36	9
3	20	13	13	0	0	0	28	28	7	9-48
4 (**)	$20 + n$	0	0	$16 + n$	$16 + n$	$16 + n$	5	5	$36 + 2n$	9
5 (**)	$20 + n$	$13 + n$	$13 + n$	0	0	0	$28 + 2n$	$28 + 2n$	7	$48 + 3n$
6	$20 + ?(**)$	varía(**)							$26 + 1,5n$	$29 + 1,5n$

Cuadro 1: Tabla grafo G1

Cuadro 2: Tabla grafo G2

Existen dos circuitos con posibilidad de ser críticos con una o tres aristas.

Existen circuitos con posibilidad de ser críticos con una, dos o tres aristas.

CONCLUSIONES

Hemos visto, en ejemplos pequeños, que aumentar la cantidad de conexiones entre estaciones estratégicas puede modificar la regularidad con la que prestamos un servicio de manera negativa o no influir de manera directa. Como se observó, la clave está en identificar circuitos críticos e intervalos de invariancia sobre las aristas involucradas. En términos concretos dichos intervalos y circuitos permiten identificar el margen operativo del planificador de la red. Entre otras acciones podrá decidir dónde invertir en reducir tiempos (solo tiene sentido mejorar aristas del circuito crítico) y cuantificar la variabilidad de los pesos de cada arista que la red puede absorber sin afectar la periodicidad global.

REFERENCIAS

[1]Subiono S., Fahim K., Adzkiya, D., Generalized public transportation scheduling using max-plus algebra. Kybernetika, 54(2), pp.243-267, (2018).

[2]Subiono, Adzkiya, D., & Fahim, K. (2017). Min-Max-Plus Algebra And Petrinet Toolbox (Versión 2.1.0) [Software de computación]. Scilab ATOMS Repository. https://atoms.scilab.org/toolboxes/maxplus_petrinet/2.1.0

[3]Baccelli F., Cohen G., Olsder G.J., Quadrat J-P., Synchronization and linearity. An algebra for discrete event systems, Wiley and Sons, 1992.